

5. CURVAS E INTEGRAL CURVILÍNEA

5.2. Integral curvilínea

Para simplificar, a partir de ahora se entenderá por **curva** una curva simple y suave a trozos.

Integral curvilínea de una función escalar

Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva (simple y suave a trozos) parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^n$, un campo o función escalar. Se define la **integral curvilínea** de f sobre γ como:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

siempre que esta integral exista (como integral propia o impropia).

Ejemplo

Calcula la integral curvilínea de $f(x, y) = xy$ sobre la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que está en el primer cuadrante.

Observaciones

1. Si γ es el grafo de la función continua $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una parametrización de γ es $\alpha(t) = (t, \varphi(t))$, $a \leq t \leq b$, y la integral curvilínea de una función escalar $f(x, y)$ definida sobre γ es:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(t, \varphi(t)) \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} dt$$

2. La integral curvilínea no depende de la parametrización elegida ni del sentido en que se recorre la curva:

$$\int_{-\gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds$$

3. Si $f \equiv 1$, entonces:

$$\int_{\gamma} 1 ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \text{long}(\gamma)$$

Aplicaciones

1. **Masa y centro de gravedad de una cuerda.** Supongamos que una cuerda o cable viene representada por la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, y que $\rho(\mathbf{x})$ es la densidad de masa en el punto $\mathbf{x} \in \gamma$. Entonces, la masa de la cuerda m y su centro de gravedad $G(x_1^g, x_2^g, \dots, x_n^g)$ son:

$$m = \int_{\gamma} \rho ds \quad x_i^g = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x_i \rho ds, \quad 1 \leq i \leq n$$

2. **Valor medio de una función sobre una curva.** El valor medio de la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, a lo largo de la curva $\gamma \subset D$ es:

$$\text{VM}(f, \gamma) = \frac{1}{\text{long}(\gamma)} \int_{\gamma} f ds$$

3. **Área de una pared.** Si $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ y $f \geq 0$ sobre γ , la integral curvilínea de f sobre γ tiene el sentido del área de la pared edificada verticalmente sobre γ con altura en cada punto dada por f :

$$\text{área} = \int_{\gamma} f ds$$

Ejemplo

Calcula la masa de una espiral del muelle con forma de hélice de ecuación $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $t \in [0, 2\pi]$, con $a, b > 0$, si la densidad puntual de masa es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Ejercicios

1. Calcula la integral curvilínea de las siguientes funciones sobre la curva que se indica:

(a) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$, sobre $\alpha(t) = (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

(b) $f(x, y, z) = y^{-3}$, sobre $\alpha(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $t \in [1, e]$.

2. Calcula el valor medio de las siguientes funciones sobre la curva que se indica:

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$, sobre $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $f(x, y, z) = x \cos z$, sobre $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$.

3. Un alambre tiene la forma de la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$. Halla su masa sabiendo que la densidad puntual es $\rho(x, y, z) = x^2$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. (a) 2; (b) $\frac{1}{3}[2\sqrt{2} - (e^{-2} + 1)^{3/2}]$.

2. (a) π ; (b) $\frac{5\sqrt{5}-1}{3\ln(2+\sqrt{5})+6\sqrt{5}}$.

3. $m = \frac{2\pi}{3}$.